

## RELACIÓN DE PROBLEMAS TIPIFICADOS SOBRE LAS OPERACIONES ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

### DOCUMENTO PARA EL PROFESORADO

Se pretende dar una visión de la distinta tipología de problemas que se pueden dar con las operaciones suma y resta. Los números empleados en la tipología son pequeños para centrarnos más en los tipos de problemas que en los algoritmos manejados en los mismos. Se irán aumentando conforme al nivel de adquisición de la numeración por el alumnado y su dominio de los algoritmos (en principio se pueden plantear estos problemas de forma verbal y para su resolución, podemos optar, en principio, por mecanismos manipulativos o gráficos, pasando después a su representación simbólica).

Es muy importante ligar los problemas a situaciones reales del entorno del alumnado, de tal forma que lo ideal es cambiar los personajes y situaciones por otros más próximos a nuestro aula.

En primer lugar haremos una clasificación de los problemas en **Rutinarios y No rutinarios (Baroody)**. En los problemas rutinarios, los datos y la incógnita están claramente especificados, hay una única solución y el camino para obtenerla es fácilmente deducible. En los problemas no rutinarios, la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, existen distintas estrategias de resolución, pueden existir distintas soluciones o bien no tener ninguna solución posible. Estos problemas son muy interesantes porque incitan a la reflexión, bien en cuanto a la búsqueda de datos relevantes, estrategias satisfactorias de solución, acotamiento de las posibles soluciones o identificación de problemas sin solución posible.

### PROBLEMAS RUTINARIOS.

#### CLASIFICACIÓN ATENDIENDO A LA ACCIÓN IMPLICADA EN LA RESOLUCIÓN Y LA UBICACIÓN DE LA INCÓGNITA

(Bermejo)

### PROBLEMAS DE CAMBIO (adición y sustracción)

(Se parte de una cantidad inicial que es modificada por otra para dar lugar al resultado. Nótese que en todos los problemas la cantidad de lápices de Carlos es modificada de forma incremental o decremental)

1.- Carlos tenía cuatro lápices. Irene le dio tres lápices más. ¿Cuántos lápices tiene ahora Carlos? ( $a+b=?$  . *Implica aumento*)

2.- Carlos tenía tres lápices. Irene le dio unos cuantos más. Si ahora Carlos tiene 7 lápices. ¿Cuántos lápices le dio Irene? ( $a+?=c$ . *Implica aumento*)

3.- Carlos tenía unos cuantos lápices. Irene le dio tres lápices más. Ahora Carlos tiene siete lápices. ¿Cuántos lápices tenía al principio? ( $?+b=c$ . *Implica aumento*)

4.- Carlos tiene siete lápices y da tres a Irene. ¿Cuántos lápices le quedan a Carlos? ( $a-b=?$ . *Implica decremento*)

5.- Carlos tenía siete lápices y da algunos a Irene. Ahora le quedan tres lápices. ¿Cuántos lápices dio a Irene? ( $a-?=c$ . *Implica decremento*)

6.- Carlos tenía una caja de lápices. Dio tres lápices a Irene. Ahora le quedan cuatro lápices. ¿Cuántos lápices había en la caja? ( $a-b=?$ . *Implica decremento*)

## PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (sólo hay aditivos)

**(Partimos de dos cantidades que se unen para obtener el resultado. Es el típico caso en el que las partes se unen para formar el todo y el todo se puede descomponer en sus partes)**

1.- Teresa tiene cuatro caramelos y Ignacio tiene cinco caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos? ( $a+b=?$  . *Implica aumento*)

2.- En un prado hay seis vacas pastando, cuatro son negras y el resto blancas. ¿Cuántas vacas blancas hay? ( $a+?=c$  . *Implica aumento*)

3.- En clase hay siete escolares esperando al profesor. Algunos son chicos y tres son chicas. ¿Cuántos chicos hay? ( $?+b=c$  . *Implica aumento*)

## PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

**(En estos problemas hay una comparación, normalmente con la fórmula “más que”, “menos que”, entre las cantidades que aparecen en el problema, lo que implica un aumento o disminución. La incógnita puede situarse bien en la diferencia entre las cantidades comparadas, bien en el conjunto referente o en el conjunto comparación)**

Con aumento:

1.- Fátima tiene cinco lápices y Gonzalo tiene tres lápices. ¿Cuántos lápices tiene Fátima más que Gonzalo? (*Diferencia desconocida*)

2.- Fátima tiene seis lápices. Tiene dos más que Gonzalo. ¿Cuántos lápices tiene Gonzalo? (*Referente desconocido*)

3.- Fátima tiene cuatro lápices. Gonzalo tiene tres lápices más que Fátima. ¿Cuántos lápices tiene Gonzalo? (*Comparación desconocida*)

Con disminución:

1.- Fátima tiene tres globos. Gonzalo tiene siete globos. ¿Cuántos globos tiene Fátima menos que Gonzalo? (*Diferencia desconocida*)

2.- Fátima tiene cinco globos. Tiene dos menos que Gonzalo. ¿Cuántos globos tiene Gonzalo?. (*Referente desconocido*)

3.- Fátima tiene ocho globos. Gonzalo tiene tres menos que Fátima. ¿Cuántos globos tiene Gonzalo? (*Comparación desconocida*)

## PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

**(En estos problemas se pretende igualar las dos cantidades propuestas modificando una de ellas, bien produciendo un aumento o una disminución de la misma)**

Aumento de una de las cantidades para la igualación:

1.- Luis tiene siete cromos y Ángel tiene cuatro cromos. ¿Cuántos cromos necesita Ángel para tener los mismos que Luis? (*Igualación desconocida*)

2.- Luis tiene cuatro cromos. Si le dan tres cromos más tendrá los mismos que Ángel.  
¿Cuántos cromos tiene Ángel? (*Igualar conjunto conocido*)

3.- Ángel tiene ocho cromos. Si a Luis le diesen tres cromos más tendría los mismos  
que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Luis? (*Igualar conjunto desconocido*)

Disminución de una de las cantidades para la igualación:

1.- Ángel tiene siete cromos y Luis tiene cuatro cromos. ¿Cuántos cromos debería  
perder Ángel para tener los mismos que Luis? (*Igualación desconocida*)

2.- Ángel tiene siete cromos. Si perdiese tres cromos tendría los mismos que Luis.  
¿Cuántos cromos tiene Luis? (*Igualar conjunto conocido*)

3.- Ángel tiene cuatro cromos. Si Luis perdiese cinco cromos tendría los mismos que  
Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Luis? (*Igualar conjunto desconocido*)

---

Según estudios realizados por Bermejo y otros se pueden escalar de menor a mayor **dificultad** este tipo de problemas para el alumnado. Ésta escala nos sirve para decidir el orden en que debemos trabajarlos en en aula.

Para la **adición** la gradación es la siguiente (de **menor a mayor dificultad**):

- 1.- Combinación con conjunto total desconocido (1)
- 2.- Cambio con resultado desconocido (1)
- 3.- Igualación en el conjunto desconocido (3)
- 4.- Cambio con conjunto de cambio desconocido (2)

- 5.- Igualación en el conjunto conocido (2)
- 6.- Combinación con parte inicial desconocida (3)
- 7.- Cambio con comienzo desconocido (3)
- 8.- Comparación con referente desconocido (2)
- 9.- Comparación con diferencia desconocida (1)
- 10.- Igualación con cantidad comparada desconocida (1)
- 11.- Combinación con parte desconocida en el segundo sumando (2)
- 12.- Comparación con conjunto de comparación desconocido (3)

(El número entre paréntesis del final indica el nº de problema dentro de cada categoría)  
Aunque no hay estudios para problemas de sustracción, probablemente (según Bermejo)  
la dificultad tenga una escala similar a la de los problemas aditivos.

## PROBLEMAS NO RUTINARIOS

Algunos ejemplos:

1.- Manuel tiene 8 canicas. Su amiga Elena le da unas cuantas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Manuel? *(Indeterminado el conjunto cambio y por lo tanto tenemos infinitas soluciones)*

2.- Un padre tiene diez euros. Le da unos cuantos a su hija Cristina y otros cuantos a su hijo Juan Manuel. ¿Cuántos euros ha dado a Cristina? *(Problema de Cambio con decremento (sustracción) en el que se desconocen las cantidades que se sustraen de la original. Existen varias soluciones, pero esta vez están acotadas porque tienen que ser menor que la referencia inicial – euros que tiene el padre- )*

3.- Juan tiene 20 euros. Quiere comprarse dos libros. Uno cuesta 8 euros y el otro 11 euros. ¿Puede comprarse los dos? *(Podemos enfocarlo como un problema de aproximación por exceso o por defecto a la cantidad inicial de euros disponibles (comparación), o bien iremos decrementando la cantidad inicial con el precio de cada uno de los libros. Como se ve es un problema que se presta a diversos métodos de resolución aditivos o sustractivos. Variando las cifras podemos jugar “con la cantidad que falta para” )*

4.- Alicia tiene 50 céntimos. En el quiosco de chucherías venden:

Pipas a 20 céntimos.

Chicles a 5 céntimos.

Paquetes de gominolas a 25 céntimos.

¿Qué puede comprarse Alicia?

*(Este problema es muy similar al anterior, pero abriendo el abanico de cantidades se puede enriquecer el número de soluciones y cálculos implicados en la búsqueda de respuestas satisfactorias, incluso podemos partir de una cantidad disponible menor a la de los artículos de la tienda, con lo cual tenemos un problema sin solución)*

“Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor”. Vicente Bermejo. Ed. CSS. Madrid

## Anexo

### Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas para el método de invención

Tomado de José Antonio Fernández Bravo (2000): Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos CISS/PRAXIS. Barcelona.

También citado en J. C. Sánchez Huete, J. A. Fernández Bravo (2003): La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. CCS. Madrid.

### Seis clases.

#### GENERATIVOS:

Primeras situaciones, desarrollan confianza, ideas y pensamiento lógico, divergencia y flexibilidad. El número es algo secundario.

- 1.-situaciones sin número. Para llegar a la solución no hace falta hacer operaciones.
- 2.-informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones (una frase, una noticia, un cartel, una anuncio,...) sin pregunta alguna, de las que hay que deducir ideas y clasificarlas en lógicas, no lógicas, posibles e imposibles.
- 3.- Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando en la medida que el alumno lo requiera.
- 4.- Enunciados abiertos. Con una información (ver 2) inventar una situación problemática en la que se utilice esa idea.
- 5.- Problemas de lógica. Usando la deducción, inducción o analogía.

#### DE ESTRUCTURACIÓN:

Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen un problema: enunciado, pregunta, resolución, solución.

- 6.- Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada
- 7.- Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática
- 8.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones, llegar a la solución dada y aplicar las operaciones indicadas
- 9.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones, llegar a la solución dada y utilizar los datos numéricos que se nos han dado.

#### DE ENLACES:

Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre las partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias.

- 10.- Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado.
- 11.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación
- 12.- Expresar las preguntas que se correspondan con el enunciado y la expresión matemática
- 13.- Expresar las preguntas que se correspondan con el enunciado y la solución.
- 14.- Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada y resolver el problema.

15.- Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y una solución dada

16.- Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y la operación a seguir en el proceso de resolución

17.- Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y el proceso de resolución dado

18.- Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado

19.- Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas

20.- Inventar un enunciado y solo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas.

21.- Inventar un enunciado y solo uno, que se corresponda con varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas.

22.- Inventar un enunciado y solo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso

#### DE TRANSFORMACIÓN:

Diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones.

23.- Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que se obtuvo anteriormente

24.- Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente

25.- Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe

26.- Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolverlo de nuevo

27.- Cambiar lo que sea necesario, y solo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto

28.- Averiguar el dato falso de un problema, dando la solución correcta.

29.- Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

30.- Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto.

31.- Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado.

32.- Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa

33.- Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe

34.- Buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución, dados varios desordenados pero que se correspondan entre si

35.- Mezclar las preguntas de dos problemas y resolver ambos

36.- Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos

37.- Mezclar el/los enunciado/s de un problema/s

38.- Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas

39.- Cambiar las preguntas de un problema por una y solo una.



## DE COMPOSICIÓN:

Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples.

40.- Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática

41.- Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución

42.-Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste

## DE INTERCONEXIÓN:

Extensión de las ideas. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad.

43.- Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo

44.- Inventar un problema con un vocabulario específico y la/s operación/es que debe/n utilizarse para su resolución

45.- Inventar un problema con un vocabulario específico y la solución dada

46.- Resolver problemas que se presenten de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno (con solución única, sin solución definida, con varias soluciones)

47.- Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación adaptada a los alumnos de Primaria

48.- Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual (poesía, caligrama, tabla, cuento,...)

49.- Relación entre lógica y matemática.